ISTITUTO LOMBARDO
ACCADEMIA DI SCIENZE E LETTERE

Ciclo formativo per Insegnanti di Scuola Superiore - anno scolastico 2017-2018

Prima lezione - Milano, 10 ottobre 2017

CRISI DELLA FISICA CLASSICA e FISICA DEI QUANTI
Esercitazione

Luciano Colombo
Dipartimento di Fisica - Università degli Studi di Cagliari
Cittadella Universitaria, 09042 Monserrato (Ca)
E-mail: luciano.colombo@unica.it
Website: people.unica.it/lucianocolombo

Costanti fisiche

Simbolo	**Grandezza**	**Valore**
R	costante universale dei gas	8.314 J K^{-1}
$\mathcal{N}_A$	numero di Avogadro	6.022×10^{23}
k_B	costante di Boltzmann	1.3807×10^{-23} J K^{-1}
k_BT	a temperatura T=293K	4.05×10^{-21} J
m_e	massa elettrone	9.11×10^{-31} Kg
m_p	massa protone	1.67×10^{-27} Kg
e	carica elettrone	1.60×10^{-19} C
e/m	rapporto carica/massa elettrone	1.76×10^{11} C Kg^{-1}
h	costante di Planck	6.62×10^{-34} J s
$\hbar$	$h/2\pi$	1.05×10^{-34} J s
c	velocità della luce nel vuoto	3.00×10^{8} m s^{-1}
σ	costante di Stefan	5.67×10^{-8} W m^{-2} K^{-4}
$\mathcal{R}$	costante di Rydberg	109677 cm^{-1}
μ_B	magnetone di Bohr	9.27×10^{-24} J T^{-1}

Esercitazione no.1 - Derivazione della legge di Planck.

Il punto di partenza è analogo al caso classico: all'equilibrio termico è la stessa cosa studiare la densità di energia associata alle onde elettromagnetiche presenti nella cavità che forma il corpo nero, oppure la densità di energia associata alle vibrazioni degli atomi che formano la parete. Ci riferiremo a queste ultime per semplicità.
Per calcolare la densità di energia associata alle vibrazioni degli atomi che formano la parete della cavità di corpo nero dobbiamo calcolare:

- il valore medio $\langle E\rangle$ alla temperatura T dell'energia di un oscillatore quantistico di frequenza ν
- il numero $\mathrm{d}n_\nu$ di oscillazioni per unità di volume e per intervallo spettrale $[\nu, \nu+\mathrm{d}\nu]$

Quest'ultima espressione è uguale al caso classico ed è riportata nella dispensa.
Per quanto riguarda, invece, il valor medio alla temperatura T dell'energia di un oscillatore quantistico di energia $E = nh\nu$ dobbiamo utilizzare un risultato importante della fisica statistica. È possibile dimostrare (si tratta della legge di distribuzione di Boltzmann) che la probabilità di trovare un sistema fisico ad energia E_i è data dall'espressione

$$p(E) = \frac{\exp\left(-\frac{E}{k_BT}\right)}{\sum_E \exp\left(-\frac{E}{k_BT}\right)} \tag{1}$$

dove E rappresenta tutti i possibili valori di energia che quel dato sistema fisico può assumere. L'energia media è data dalla media pesata (sulle diverse probabilità) di tutte le energie possibili:

$$\langle E\rangle = \sum_E p(E)E \tag{2}$$

Sostituendo in questa espressione la formula quantistica per l'energia di un oscillatore armonico $E_n = nh\nu$ otteniamo immediatamente

$$\langle E\rangle = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{k_BT}\right)\ nh\nu}{\sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{k_BT}\right)} \tag{3}$$

Per calcolare questa espressione, conviene porre $x = \exp\left(-\frac{h\nu}{k_BT}\right)$ e ricordare il risultato di Analisi Matematica riguardante la somma di una serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \tag{4}$$

Quindi, il denominatore dell'espressione per l'energia media si può convenientemente trasformare in:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{k_BT}\right) = \frac{1}{1-\exp\left(-\frac{h\nu}{k_BT}\right)} \tag{5}$$

In maniera analoga, utilizzando la stessa sostituzione di variabili, possiamo scrivere per il numeratore

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{k_BT}\right) &= h\nu(2x^2 + 3x^3 \cdots) = \\ = xh\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) &= xh\nu\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^{-1} = \tfrac{xh\nu}{(1-x)^2} \end{aligned} \tag{6}$$

Combinando questi due risultati otteniamo immeditamente

$$\langle E\rangle = \frac{h\nu}{\exp\left(-\frac{nh\nu}{k_BT}\right) - 1} \tag{7}$$

un risultato ben diverso da quanto previsto dal principio di equipartizione dell'energia della termodinamica clasica!

In definitiva, per la densità di energia u_ν associata alle vibrazioni degli atomi che formano la parete della cavità di corpo nero ricaviamo il risultato

$$u_\nu = \langle E \rangle \mathrm{d}n_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \, \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{nh\nu}{k_B T}\right) - 1} \tag{8}$$

che rappresenta la legge di Planck.

Esercitazione no.2 - **Calcolare la lunghezza d'onda per cui è massima la densità di energia elettromagnetica emessa da un corpo nero a temperatura T.**

Poiché la domanda è espressa in termini di lunghezza d'onda, bisogna convertire la formula di Planck data nel testo della dispensa, in modo da ottenere la u_λ. A tal fine basta ricordare che lunghezza d'onda λ e frequenza ν sono legate dalla semplice relazione

$$\lambda\nu = c \tag{9}$$

dove c rappresenta la velocità della luce. Sostituendo $\nu = c/\lambda$ otteniamo che

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \tag{10}$$

A questo punto il problema è ridotto a quello di trovare il massimo della suddetta funzione. Per convenienza poniamo

$$x = \frac{hc}{k_B T} \tag{11}$$

in modo che la densità di energia possa essere più facilmente scritta come

$$u_\lambda = \frac{8\pi k_B^5 T^5}{c^4 h^4}\frac{x^5}{e^x - 1} \tag{12}$$

Imponendo che la derivata prima sia nulla, otteniamo

$$e^{-x} + \frac{1}{5}x - 1 = 0 \tag{13}$$

che ammette una soluzione per x=4.9651.
Possiamo quindi immediatamente calcolare la lunghezza d'onda λ_{max} alla quale di osserva massima densità di energia di emissione:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \tag{14}$$

dove la costante b vale

$$b = \frac{hc}{4.9651 k_B} = 2.8978 \times 10^{-3}\text{m K} \tag{15}$$

Esercitazione no.3 - Calcolare teoricamente il valore della costante di Stefan.

La formula di Planck fornisce la densità spettrale di energia elettromagnetica emessa da un corpo nero. Integrando su tutte le frequenze possibili si ottiene la densità totale di emissione

$$u_{tot} = \int_0^{+\infty} u_\nu \mathrm{d}\nu \tag{16}$$

Conviene eseguire un cambio di variabile ponendo

$$x = \frac{h\nu}{k_B T} \tag{17}$$

in modo che

$$\mathrm{d}\nu = \frac{k_B T}{h}\mathrm{d}x \tag{18}$$

Così facendo si ottiene

$$u_{tot} = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\mathrm{d}x \tag{19}$$

L'integrale che compare nel membro di destra è un integrale tabulato e si ricava che

$$u_{tot} = 51.9504\,\frac{\pi k_B^4}{c^3 h^3} T^4 \tag{20}$$

in modo che la costante di Stefan σ risulta essere

$$\sigma = 51.9504\,\frac{\pi k_B^4}{c^3 h^3} = 7.5642 \times 10^{-16}\mathrm{Jm}^{-3}\mathrm{K}^{-4} \tag{21}$$

Qualora ci si riferisca all'energia totale emessa nell'unità di tempo dall'unità di area la costante di Stefan viene espressa come

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{K}^{-4} \tag{22}$$

che corrisponde al valore tabulato.

Esercitazione no.4 - **Il deuterio è un isotopo dell'idrogeno con massa nucleare doppia. Valutare come varia lo spettro di emissione o assorbimento del deuterio rispetto all'idrogeno.**

Questo esercizio corrisponde ad una applicazione del modello atomico di Bohr: la domanda equivale infatti a valutare come varia la costante di Rydberg tra idrogeno e deuterio.
Per il deuterio (simbolo D) possiamo scrivere:

$$\mathcal{R}_D = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \frac{1}{1 + \frac{m_e}{2m_p}} = \mathcal{R}_H \frac{1}{1 + \frac{m_e}{2m_p}} \tag{23}$$

dove abbiamo posto $A = 2$ (il nucleo dell'atomo di deuterio è formato da un protone e da un neutrone) e abbiamo indicato con $\mathcal{R}_H$ il valore della costante di Rydber per l'atomo di idrogeno in approssimazione di massa nucleare infinita.
Sostituendo i valori numerici, si ottiene facilmente che

$$\mathcal{R}_D = \mathcal{R}_H \times 0.99973 = 109707 \mathrm{cm}^{-1} \tag{24}$$

Esercitazione no.5 - Nell'ambito del modello di Bohr si trascura l'effetto della forza di interazione gravitazionale tra nucleo e elettrone. Giustificare questa approssimazione.

Come discusso nel testo, l'unica forza attrattiva considerata nel modello di Bohr è quella coulombiana. Ricordando che

$$\text{carica elettrica elementare} = e = 1.6 \times 10^{-19}\text{C} \tag{25}$$

$$\text{massa elettrone} = m_e = 9.11 \times 10^{-31}\text{Kg} \tag{26}$$

$$\text{massa protone} = m_p = 1.67 \times 10^{-27}\text{Kg} \tag{27}$$

possiamo scrivere il rapporto tra forza gravitazionale F_g e forza coulombiana F_c per l'atomo di idrogeno come

$$\frac{F_g}{F_c} = \frac{G m_e m_p 4\pi\epsilon_0}{e^2} \tag{28}$$

dove G rappresenta la costante di gravitazione universale.
Sostituendo i valori numerici otteniamo facilmente

$$\frac{F_g}{F_c} = 4.4 \times 10^{-40} \tag{29}$$

che ampiamente dimostra quanto la forza gravitazionale sia trascurabilmente piccola rispetto a quella coulombiana.
L'assunzione del modello atomico di Bohr risulta, dunque, ampiamente giustificata.

Esercitazione no.6 - Calcolare energia E e lunghezza d'onda λ di un fotone emesso da un atomo di idrogeno per la transizione tra lo stato iniziale $n_i = 10$ e lo stato finale $n_f = 1$.

Utilizziamo il secondo postulato del modello di Bohr: l'energia E del fotone emesso si calcola come

$$E = \Delta E_{i \to f} = 13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = 13.46 \text{ eV} \tag{30}$$

mentre la corrispondente lunghezza d'onda λ è

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1.24 \times 10^{-6}\text{eV} \cdot \text{m}}{13.46 \text{ eV}} = 9.212 \times 10^{-8}\text{m} \tag{31}$$

La lunghezza d'onda del fotone $\lambda = 921.2\text{Å}$ corrisponde all'emissione di luce ultravioletta.
Per ricavare questo risultato, abbiamo utilizzato questi fattori di conversione:

$$1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{J} \tag{32}$$

$$h = 4.14 \times 10^{-15}\text{eV} \cdot \text{s} = 6.62 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s} \tag{33}$$

Esercitazione no.7 - **Si consideri un atomo di idrogeno nello stato fondamentale. Un fotone lo ionizza. L'elettrone così liberato viene catturato da un altro protone, formando un nuovo atomo di idrogeno nel primo stato eccitato. Il processo di formazione del nuovo atomo libera un fotone di lunghezza d'onda λ pari a 466Å. Quale è l'energia dell'elettrone libero, prima della cattura?**

L'intero processo deve ovviamente conservare l'energia totale del sistema. Pertanto, l'energia E_{libero} dell'elettrone reso libero dal processo di ionizzazione deve essere uguale alla somma delle energie $E_{catturato}$ dell'elettrone ricatturato e E_{fotone} del fotone emesso durante questo processo di cattura.
Possiamo dunque scrivere

$$E_{libero} = E_{catturato} + E_{fotone} = \frac{-13.6\text{eV}}{n^2} + \frac{hc}{\lambda} \tag{34}$$

dove per i dati del problema $n = 2$.
Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$E_{libero} = E_{catturato} + E_{fotone} = -3.4\text{eV} + 26.6\text{eV} = 23.2\text{eV} \tag{35}$$